НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
НАУКА И МИРОВОЗЗРЕНИЕ

УДК-519.21

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Какалыев Бегенч Агамырадович
Преподаватель кафедры алгебры и теории вероятностей Туркменского государственного университета имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Мередова Гурбантач Сопыевна
Студентки 5 курса математического факультета Туркменского государственного университета имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Гелдиева Гунча Азымовна
Студентки 5 курса математического факультета Туркменского государственного университета имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Аннотация

В статье рассматриваются случайные процессы как один из основных объектов современной теории вероятностей и математического моделирования. Раскрываются их математическая природа, основные характеристики и классификация, особенности дискретных и непрерывных процессов, а также роль вероятностных распределений в описании изменяющихся во времени случайных явлений. Особое внимание уделяется марковским цепям, пуассоновским и гауссовским процессам, броуновскому движению, стационарности и эргодичности. Анализируются математические методы исследования случайной динамики, включая изучение переходных вероятностей, корреляционных характеристик, предельных распределений и случайных траекторий. Рассматриваются области практического применения стохастических моделей в физике, экономике, инженерии, информационных технологиях, биологии и теории массового обслуживания. Обосновывается значение случайных процессов для исследования систем, поведение которых невозможно полностью описать детерминированными математическими зависимостями. Подчёркивается, что построение адекватной стохастической модели требует сочетания математической строгости, анализа исходных данных и понимания природы исследуемого явления.

Ключевые слова: случайные процессы, теория вероятностей, математическая статистика, марковские цепи, пуассоновский процесс, броуновское движение, стационарность, корреляция, стохастическое моделирование.

Случайные процессы в современной математике

Теория случайных процессов занимает особое место в современной математике, поскольку позволяет исследовать явления, развитие которых во времени сопровождается неопределённостью. В отличие от классических детерминированных моделей, где состояние системы определяется заданными начальными условиями и законом изменения, стохастические модели учитывают случайные воздействия, непредсказуемые события и вероятностный характер наблюдаемых величин.

Понятие случайного процесса возникает при необходимости изучать не отдельный случайный результат, а последовательность взаимосвязанных случайных состояний. Например, изменение температуры окружающей среды, колебания рыночных цен, количество обращений в службу поддержки, распространение инфекции или движение частиц могут рассматриваться как процессы, развивающиеся во времени под воздействием множества факторов.

Математически случайный процесс представляет собой семейство случайных величин, определённых на одном вероятностном пространстве и индексированных некоторым множеством параметров. Чаще всего таким параметром выступает время, хотя в пространственных моделях индексом может быть координата или положение в определённой области.

Главное отличие случайного процесса от отдельной случайной величины заключается в наличии временной или иной структурной зависимости между наблюдениями. Если случайная величина характеризует неопределённость отдельного результата, то случайный процесс описывает изменение этой неопределённости на протяжении определённого интервала.

Теория случайных процессов тесно связана с теорией вероятностей, математическим анализом, функциональным анализом и статистикой. Её развитие позволило сформировать математический аппарат для исследования динамических систем, в которых случайность является не внешней помехой, а существенным свойством самого объекта. Современные учебные курсы включают изучение марковских цепей, пуассоновских процессов, случайных блужданий, мартингалов и броуновского движения как фундаментальных моделей вероятностной динамики.

Математическая структура и основные характеристики случайного процесса

Для полноценного исследования случайного процесса необходимо определить его вероятностную структуру. Она включает не только возможные значения процесса в отдельные моменты времени, но и закономерности совместного изменения этих значений.

Одной из основных характеристик является распределение случайной величины в фиксированный момент времени. Оно показывает, какие значения процесса наиболее вероятны и насколько широко могут изменяться наблюдаемые результаты. Например, при изучении суточного изменения температуры распределение позволяет определить вероятность нахождения температуры в определённом диапазоне.

Однако распределений отдельных значений недостаточно для описания всего процесса. Необходимо учитывать совместные распределения нескольких наблюдений, поскольку значения, полученные в соседние моменты времени, обычно взаимосвязаны. Температура сегодня часто зависит от температуры предыдущих часов, а стоимость финансового актива может быть связана с его предыдущими значениями.

Важное место занимает математическое ожидание, характеризующее средний уровень случайного процесса в определённый момент. При исследовании длительных наблюдений оно позволяет оценивать общую тенденцию изменения показателя. Другая характеристика — дисперсия — отражает степень разброса возможных значений относительно среднего уровня.

Для анализа взаимосвязи между различными моментами времени используется корреляционная функция. Она помогает установить, насколько сильно значения процесса в разные моменты связаны между собой. Если зависимость постепенно ослабевает с увеличением временного интервала, это свидетельствует о снижении влияния прошлых состояний на последующие.

Кроме того, важным объектом исследования является траектория случайного процесса. Под траекторией понимается конкретная реализация процесса, то есть последовательность значений, которая могла бы наблюдаться в одном отдельном эксперименте. Разные реализации одного и того же процесса могут существенно отличаться, хотя подчиняются общим вероятностным закономерностям.

Таким образом, исследование случайного процесса предполагает переход от отдельных наблюдений к изучению совокупности возможных траекторий, распределений и зависимостей. Именно это отличает стохастическую теорию от обычного описания временных рядов и делает её самостоятельным разделом математического знания.

Классификация случайных процессов

Случайные процессы классифицируются по нескольким признакам, основными из которых являются характер множества временных параметров и множество возможных состояний.

По времени различают процессы с дискретным и непрерывным параметром. В дискретном случае наблюдения рассматриваются в отдельные моменты, например ежедневно, ежечасно или после каждого события. Подобные модели

применяются при изучении последовательности финансовых показателей, результатов измерений и изменения состояния технических систем.

Непрерывные процессы определяются для любого момента времени в рассматриваемом интервале. Они используются при моделировании физических колебаний, движения частиц, изменения электрических сигналов и других явлений, развитие которых происходит непрерывно.

По множеству состояний выделяют процессы с дискретными и непрерывными значениями. В первом случае процесс может принимать значения из конечного или счётного множества. Например, состояние технического устройства может описываться категориями «исправно», «неисправно» и «на обслуживании». Во втором случае возможны значения из некоторого непрерывного диапазона, как при моделировании температуры, давления или скорости движения.

Сочетание этих классификационных признаков образует несколько основных типов процессов. Дискретный процесс с дискретным временем может описывать последовательность состояний системы после каждого очередного наблюдения. Процесс с непрерывным временем и дискретными состояниями применяется для моделирования случайных переходов между ограниченным количеством состояний. Непрерывные по времени и состояниям процессы используются при изучении физических и финансовых явлений.

Дополнительным основанием классификации выступает характер зависимости между состояниями. Некоторые процессы обладают свойством независимых приращений, другие характеризуются зависимостью от предыдущих значений. Отдельно рассматриваются процессы с независимыми приращениями, марковские процессы, стационарные процессы и процессы с особыми ограничениями на структуру случайных траекторий.

Такая классификация имеет не только теоретическое значение. Она позволяет исследователю выбрать математический аппарат, соответствующий природе изучаемого объекта. Неправильно выбранный тип модели способен привести к существенным ошибкам даже при использовании сложных вычислительных методов.

Марковские процессы и принцип отсутствия зависимости от всей предыстории

Марковские процессы являются одним из наиболее значимых классов случайных процессов. Их основная особенность заключается в том, что будущее состояние системы при известном настоящем не зависит от полной истории её развития. Иными словами, для прогнозирования следующего состояния достаточно информации о текущем состоянии, если выполнены условия марковского свойства.

Простейшим примером выступает модель изменения состояния оборудования. Устройство может находиться в исправном состоянии, в состоянии отказа или на техническом обслуживании. Если вероятность перехода между этими состояниями определяется только текущим состоянием, модель может быть представлена в виде марковской цепи.

Марковские цепи с дискретным временем описывают последовательность переходов между состояниями через определённые интервалы. Для их исследования используются матрицы переходных вероятностей. Каждая строка такой матрицы характеризует возможные переходы из одного состояния в другие, а сумма вероятностей перехода из заданного состояния равна единице.

Марковские модели применяются в теории надёжности, экономике, демографии, биологии, компьютерных сетях и анализе последовательностей. Например, в информационных технологиях они могут использоваться для моделирования переходов между состояниями сетевого соединения. В экономике — для изучения изменения кредитного рейтинга предприятия или вероятности перехода между различными состояниями рынка.

Отдельную группу составляют непрерывные марковские процессы. В них переходы между состояниями могут происходить в произвольные моменты времени. Для описания таких систем применяются интенсивности переходов и специальные математические уравнения.

Важное достоинство марковских моделей заключается в сравнительной простоте математического представления сложных динамических систем. Вместе с тем их применение предполагает, что выбранное описание состояния действительно содержит всю необходимую информацию для определения будущего поведения. Если существенные характеристики прошлых событий не включены в модель, марковское приближение может оказаться недостаточно точным.

Пуассоновские процессы и моделирование потока случайных событий

Пуассоновский процесс является фундаментальной моделью для исследования случайных событий, возникающих во времени. Он используется в ситуациях, когда необходимо описать количество событий, произошедших за определённый интервал, и характер их поступления.

Классическим примером является поток обращений в службу технической поддержки. В течение часа может поступить различное количество заявок, причём точное время появления каждой из них заранее неизвестно. Аналогичные задачи возникают при исследовании телефонных вызовов, поступления заказов, отказов оборудования и отдельных видов биологических событий.

В стандартной модели пуассоновского процесса предполагается, что события возникают независимо друг от друга, а интенсивность их появления остаётся постоянной на рассматриваемом временном интервале. Кроме того, вероятность

появления нескольких событий в исключительно малом промежутке времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события.

Важнейшим параметром модели является интенсивность потока. Она характеризует среднее количество событий, возникающих за единицу времени. При постоянной интенсивности число событий за одинаковые временные промежутки подчиняется определённому вероятностному распределению.

Пуассоновский процесс имеет большое значение для теории массового обслуживания. В этой области он используется для моделирования поступления клиентов, заявок или сообщений в систему, где ограниченное количество ресурсов должно обеспечивать обслуживание случайного потока требований.

Например, при проектировании медицинского учреждения необходимо учитывать, что количество пациентов, обращающихся за помощью в течение часа, может существенно изменяться. Если известна статистика поступления обращений, можно оценивать нагрузку на персонал и планировать необходимое количество обслуживающих ресурсов.

Однако стандартная модель не всегда соответствует реальным условиям. В некоторых системах интенсивность поступления событий меняется в течение суток, а отдельные события могут быть взаимосвязаны. В таких случаях используются неоднородные пуассоновские процессы и более сложные модели потоков. Развитие данной теории связано с исследованиями случайных поступлений, процессов обновления и систем массового обслуживания.

Броуновское движение и непрерывные случайные модели

Броуновское движение представляет собой одну из важнейших математических моделей непрерывного случайного процесса. Его исторической основой стали наблюдения за хаотическим движением мельчайших частиц, находящихся во взвешенном состоянии в жидкости или газе.

Математическая модель броуновского движения описывает непрерывные случайные траектории, обладающие независимыми приращениями и определёнными вероятностными характеристиками. Одной из существенных особенностей является то, что траектории такого процесса непрерывны, но в обычном смысле не обладают гладкостью. Это означает, что процесс может непрерывно изменяться, однако его траектории не обязательно имеют производную в каждой точке.

Броуновское движение стало основой для развития стохастического анализа. Оно применяется при моделировании случайных колебаний, диффузионных процессов и динамических систем, испытывающих непрерывное воздействие большого количества малых случайных факторов.

Заключение

Случайные процессы представляют собой фундаментальный раздел теории вероятностей, позволяющий исследовать динамику систем, развитие которых сопровождается неопределённостью. Их математический аппарат объединяет распределения вероятностей, корреляционные характеристики, марковские модели, пуассоновские потоки и непрерывные случайные процессы. Использование этих методов позволяет анализировать физические, экономические, биологические и инженерные явления, выявлять закономерности и оценивать вероятные сценарии развития систем. Современное значение стохастической теории определяется её способностью соединять строгие математические принципы с практическими задачами моделирования. Дальнейшее развитие данного направления будет связано с исследованием сложных зависимых процессов, совершенствованием вычислительных методов и интеграцией вероятностных моделей с современными технологиями обработки данных.

Список литературы

1. Gallager R. G. *Stochastic Processes: Theory for Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 553 p. ISBN 978-1-107-03975-9.
2. Ross S. M. *Introduction to Probability Models*. 12th ed. Academic Press, 2019.
3. Brémaud P. *Probability Theory and Stochastic Processes*. Cham: Springer, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-40183-2.
4. Kallenberg O. *Foundations of Modern Probability*. 3rd ed. Cham: Springer, 2021.
5. Grimmett G., Stirzaker D. *Probability and Random Processes*. 3rd ed. Oxford: Oxford University Press, 2001.
6. Norris J. R. *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
7. Karlin S., Taylor H. M. *A First Course in Stochastic Processes*. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1975.
8. Øksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6th ed. Berlin: Springer, 2003.
9. Lefebvre M. *Applied Stochastic Processes*. New York: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-48976-6.
10. Pascucci A. *Probability Theory II*. Cham: Springer, 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-63193-1.