



СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Султанмырадова Тавус

Преподаватель, Туркменский государственный педагогический институт имени
Сеидназара Сейди
г. Туркменабад Туркменистан

Хамракулыева Азиза

Студент, Туркменский государственный педагогический институт имени
Сеидназара Сейди
г. Туркменабад Туркменистан

Аннотация

В настоящей исследовательской работе осуществляется детальный, глубоко развернутый, исчерпывающий и фундаментальный системный математический, вероятностный и функционально-аналитический анализ теории стохастических дифференциальных уравнений в частных производных, бесконечномерного стохастического анализа и вычислительных методов стохастической оптимизации. В центре внимания находится исследование регулярности, существования и единственности мягких, сильных и слабых решений нелинейных эволюционных уравнений с мультипликативным и аддитивным пространственно-временным белым шумом, а также скачкообразными процессами Леви. В статье подробно рассматриваются теория пространств Соболева относительно бесконечномерных гауссовских мер, функционально-дифференциальное исчисление Маллявена, стохастические уравнения гидродинамики Навье — Стокса, теория марковских случайных полей, эргодичность стохастических аттракторов, методы вариационных неравенств и современный аппаратный комплекс стохастической градиентной оптимизации в гильбертовых и банаховых пространствах.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, исчисление Маллявена, бесконечномерные случайные процессы, уравнения Навье — Стокса, стохастическая оптимизация, эргодичность, цилиндрические винеровские процессы, пространства Соболева, стохастический градиентный спуск, нелинейные динамические системы.

Введение

Современная математическая физика и теория вероятностей на протяжении последних десятилетий переживают масштабную парадигмальную трансформацию, связанную с необходимостью описания не просто случайных величин или конечного числа случайно колеблющихся параметров, а концептуально бесконечномерных динамических объектов, подверженных флуктуирующим воздействиям высокой интенсивности. Классическая теория обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений Ито, успешно зарекомендовавшая себя при моделировании точечных систем и сосредоточенных финансовых рынков, оказывается принципиально недостаточной, когда физический или технологический процесс распределен в пространстве и описывается полями скоростей, температур, напряжений или концентраций. В таких условиях флуктуации внешней среды, квантовые шумы или случайные неоднородности самого материала требуют построения строгой математической теории стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

Возникновение и развитие бесконечномерного стохастического анализа потребовало кардинального пересмотра традиционных аналитических подходов, интеграции вероятностной теории меры в функциональные пространства Соболева и Гильберта — Шмидта, а также создания совершенно новых классов интегральных и дифференциальных операторов. Основная трудность математического описания бесконечномерных стохастических систем заключается в том, что пространственно-временной белый шум, выступающий обобщенной производной цилиндрического винеровского процесса, обладает чрезвычайно низкой регулярностью, представляя собой случайную обобщенную функцию со значениями в пространствах распределений Шварца. Сочетание нелинейности исходного физического оператора с сингулярной природой случайного возмущения порождает математические эффекты, не имеющие аналогов в детерминированном математическом анализе.

Исследование эволюции случайно-деформируемых полей и сред находит критическое практическое и теоретическое применение в физике турбулентной плазмы, океанологии, теории фазовых переходов в случайных средах, квантовой теории поля, а также при проектировании высокопроизводительных вычислительных алгоритмов стохастической оптимизации для обучения нейронных сетей сверхвысокой размерности. Строгое математическое обоснование корректности бесконечномерных стохастических моделей, доказательство их устойчивости, эргодичности и аппроксимируемости образуют одно из наиболее активных и динамично развивающихся направлений современной фундаментальной математики.

Бесконечномерный вероятностный базис, цилиндрические винеровские процессы и исчисление Маллявена

Фундаментальной математической основой для построения теории стохастических уравнений в частных производных является введение вероятностного пространства с фильтрацией, удовлетворяющей стандартным условиям полноты и непрерывности справа, и конструирование случайных процессов со значениями в бесконечномерных топологических векторных пространствах. В отличие от конечномерного случая, стандартный гауссовский белый шум не может существовать в качестве классического случайного процесса в сепарабельном гильбертовом пространстве, так как соответствующая ему ковариационная матрица должна была бы быть тождественным оператором, который в бесконечномерном случае не является оператором ядерного типа, что противоречит теореме Милоша — Сазонова о продолжении меры.

Для преодоления данного фундаментального препятствия вводится понятие цилиндрического винеровского процесса, задаваемого формальным рядом с независимыми скалярными винеровскими процессами по ортонормированному базису гильбертова пространства. Такой процесс не сходится в исходном гильбертовом пространстве, однако корректно определен в более широком гильбертовом пространстве с ядерным вложением. Это позволяет построить стохастический интеграл Ито по цилиндрическому винеровскому процессу для случайно зависящих операторнозначных процессов, удовлетворяющих условиям интегрируемости по норме Гильберта — Шмидта. Аналогичным образом конструируются бесконечномерные процессы Леви, включающие компенсированные пуассоновские случайные меры, служащие математической моделью мгновенных пространственно-распределенных катастрофических прыжков и импульсных воздействий.

Параллельно со стохастическим интегрированием ключевым аналитическим инструментом выступает вариационное исчисление Маллявена, также известное как стохастическое исчисление вариаций над гауссовскими пространствами. Исчисление Маллявена вводит оператор стохастического дифференцирования, определяемый на гладких цилиндрических функционалах, и сопряженный к нему сопряженный оператор Скорохода, являющийся обобщением интеграла Ито на случае незаспойлеренных, то есть независимых от фильтрации, процессов. Матрица Маллявена, строящаяся на основе производных Маллявена, позволяет исследовать абсолютную непрерывность распределений решений нелинейных стохастических уравнений в частных производных относительно меры Лебега или меры Гаусса, а также доказывать гладкость плотностей переходных вероятностей при выполнении бесконечномерных условий типа Хёрмандера для коммутаторов векторных полей.

Аналитические концепции решений нелинейных эволюционных стохастических уравнений

Исследование нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных требует жесткой дифференциации концепций решений в зависимости от структуры нелинейности, типа дифференциального оператора и регулярности шумных источников. В абстрактной формулировке эволюционное уравнение описывается монотонным, псевдомонотонным или аккретивным оператором, действующим из банахова пространства в его сопряженное, с добавлением стохастического дифференциала Ито или Стратоновича. Анализ таких систем опирается на три основных класса решений: сильные, мягкие и слабые марковские решения.

Сильные решения определяются в ситуациях, когда дифференциальные операторы обладают достаточной гладкостью, а само решение обладает высокой пространственной регулярностью, позволяющей непосредственно применять формулу Ито для квадрата нормы. Мягкие решения базируются на операторной теории полугрупп и использовании формулы Дюамеля, где дифференциальный оператор порождает C_0 -полугруппу или аналитическую полугруппу линейных операторов, а уравнение преобразуется в нелинейное стохастическое интегральное уравнение Вольтерра. Мягкий подход оказывается исключительно плодотворным при анализе полулинейных параболических и гиперболических уравнений с распределенными задержками или памяти.

В случаях, когда физический оператор содержит сильные адвективные или критические нелинейности, как в стохастических уравнениях гидродинамики Навье — Стокса, уравнениях Магнитогидродинамики или стохастических уравнениях реакция-диффузия с нелокальными потенциалами, классическая регулярность теряется, и исследование переносится на слабые марковские решения. Слабые решения строятся методом галеркинских приближений в сочетании с компактными вложениями пространств Соболева — Орлича, теоремами Прохорова и Скорохода о вероятностной плотности и методами монотонности. Доказательство единственности и непрерывной зависимости слабых решений от начальных данных представляет собой одну из наиболее трудных и до сих пор не до конца решенных задач математического анализа.

Эргодичность стохастических аттракторов, инвариантные меры и фазовые переходы

Длительное эволюционное поведение нелинейных стохастических динамических систем характеризуется формированием стохастических аттракторов и установлением инвариантных мер в бесконечномерных фазовых пространствах. В детерминированных системах с диссипацией энергия рассеивается, а фазовый объем сжимается к компактному инвариантному множеству. При наличии непрерывного стохастического накачка энергии за счет белого или цветного шума система не приходит к статическому равновесию, а переходит в режим

статистического стационарного состояния, описываемого инвариантным вероятностным распределением на фазовом многообразии.

Изучение эргодических свойств стохастических дифференциальных уравнений в частных производных опирается на анализ операторов Маркова — Феллера и полугрупп Дуоба, действующих на пространстве ограниченных борелевских функций. Ключевым свойством является строгое удовлетворение критериям строгого хаусдорфова сглаживания или свойствам асимптотической строгости, что гарантирует уникальность инвариантной меры. Для вырожденных шумов, действующих лишь на ограниченное число низкочастотных пространственных мод, доказательство эргодичности становится чрезвычайно сложным и требует применения бесконечномерных аналогов концепции асимптотической пассивности и передачи энергии по спектральным модам за счет нелинейного взаимодействия, аналогично процессам каскадного переноса энергии в Колмогоровской модели турбулентности.

При изменении параметров стохастической системы — таких как интенсивность шума, вязкость или геометрия области — инвариантные меры могут претерпевать радикальные структурные изменения, известные как стохастические феноменологические или динамические бифуркации. Стохастические бифуркации отражают возникновение физических фазовых переходов, разрушение пространственной симметрии и метастабильные состояния. Анализ времени первого выхода траектории решения из потенциальной ямы и вероятностей катастрофических отклонений реализуется методами теории больших отклонений Фрейдлина — Вентцеля, преобразующими вариационные задачи для действия в расчет асимптотик интегралов по функциональным пространствам.

Стохастическая оптимизация, бесконечномерные вариационные неравенства и вычислительные алгоритмы

Параллельно с аналитическим исследованием стохастических уравнений стремительное развитие получила теория стохастической оптимизации в бесконечномерных гильбертовых и банаховых пространствах. Задачи стохастической оптимизации возникают при необходимости нахождения минимума математического ожидания невыпуклого функционала качества в условиях, когда доступ к истинному распределению вероятностей отсутствует, а доступны лишь шумные или неполные выборки. Подобные проблемы образуют теоретическое ядро современного машинного обучения, обратных задач стохастической инверсии, а также систем автоматического управления в условиях неопределенности.

Бесконечномерный стохастический градиентный спуск и его проксимальные, ускоренные и адаптивные модификации представляют собой дискретные стохастические динамические системы, эволюционирующие в пространствах параметров. Анализ сходимости таких алгоритмов в гильбертовых пространствах

требует использования теории стохастических операторных неравенств, методов супермартингалов и неравенств Роббинса — Монро. Для обработки фазовых ограничений используются стохастические вариационные неравенства, где проекционные операторы на выпуклые замкнутые множества вводят субдифференциальные нелинейности типа многозначных операторов, что приводит к необходимости исследования стохастических дифференциальных включений.

Современные вычислительные методы стохастической оптимизации активно используют концепцию понижения размерности и стохастического Галеркинського проекторного метода, когда бесконечномерное пространство состояний редуцируется на случайные подпространства, определяемые спектральным разложением Карунена — Лозва. Разработка робастных вычислительных схем, устойчивых к тяжелым хвостам случайных распределений и асимметричным шумам, опирается на принципы зеркального спуска и информационно-геометрические методы, использующие метрику Фишера — Рао на пространстве вероятностных мер, что создает прямую связь между численной оптимизацией, дифференциальной геометрией и бесконечномерной статистикой.

Заключение

Подводя окончательный, глубоко структурированный, фундаментальный и всеобъемлющий системный итог нашему подробному научно-исследовательскому анализу стохастических дифференциальных уравнений в частных производных, бесконечномерного стохастического анализа и численных методов стохастической оптимизации, можно с абсолютной уверенностью констатировать, что данная математическая дисциплина находится на самом передовом рубеже современной фундаментальной и прикладной науки.

Синтез бесконечномерной теории меры, вариационного исчисления Маллявена, операторной теории полугрупп, эргодической теории нелинейных стохастических аттракторов и алгоритмов стохастической градиентной оптимизации предоставляет научному сообществу беспрецедентно мощный и математически строгий аппарат для исследования случайных процессов высокой сложности. Дальнейшее развитие бесконечномерного стохастического анализа откроет фундаментальные перспективы для создания универсальных методов квантового и стохастического моделирования, преодоления проклятия размерности в искусственном интеллекте и понимания глубоких законов физики неравновесных систем в XXI веке.

Литература

1. Да Прато Дж., Забчик Е. Стохастические уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 2020. — 512 с.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. — М.: МЦНМО, 2021. — Т. 1-2. — 1024 с.

3. Калинин А. В. Стохастические процессы и дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Физматлит, 2022. — 416 с.
4. Богачев В. И. Гауссовы меры. — М.: Наука, 2019. — 352 с.
5. Крылов Н. В. Лекции по стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных. — М.: Изд-во МГУ, 2023. — 288 с.
6. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 2020. — 424 с.