



НОВАЯ ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Абдуллаев Рустам Ибрагимович

доктор физико-математических наук, Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека
г. Ташкент, Узбекистан

Аннотация

Статья представляет новую теорему в аналитической теории чисел, касающуюся распределения простых чисел в особых классах арифметических прогрессий. Несмотря на фундаментальную важность теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии, вопрос о точной плотности и асимптотике распределения простых чисел в зависимости от параметров прогрессии остается предметом активных исследований. В данной работе предложена новая аналитическая конструкция, позволяющая сформулировать теорему, которая уточняет асимптотическое поведение функции $\pi_{a,d}(x)$ для определенного класса прогрессий, где a и d удовлетворяют новому условию, связанному с их мультипликативной структурой. Доказательство основано на модифицированном подходе к использованию характеров Дирихле и применении нового типа L -функций, что открывает перспективы для дальнейшего изучения тонких свойств распределения простых чисел.

Ключевые слова: Теория чисел, простые числа, распределение простых чисел, арифметические прогрессии, функция $\pi(x)$, гипотеза Римана, характеры Дирихле, аналитическая теория чисел.

1. Введение

Простые числа, являясь "атомами" натуральных чисел, всегда находились в центре внимания математиков. Их распределение в ряду натуральных чисел — одна из самых глубоких и сложных проблем в теории чисел. Фундаментальный результат в этом направлении, **Теорема о простых числах**, гласит, что функция $\pi(x)$, которая подсчитывает количество простых чисел, не превосходящих x , асимптотически равна $x/\ln(x)$. Другим краеугольным камнем является **Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии**, которая утверждает, что если a и d — взаимно простые целые числа, то арифметическая прогрессия $a, a+d, a+2d, \dots$ содержит бесконечно много простых чисел. Более того, простые числа равномерно распределены по всем классам вычетов по модулю d .

Однако эти теоремы предоставляют лишь общую картину. Вопрос о более точном асимптотическом поведении и возможных отклонениях от равномерности для конкретных прогрессий остается открытым. Предлагаемая работа нацелена на дальнейшее продвижение в этом направлении, предоставляя новый, более точный результат для специфических арифметических прогрессий.

2. Формулировка новой теоремы

Для формулировки нашей теоремы нам понадобится ввести специальную функцию, связанную с делителями числа d . Пусть $\Omega(d)$ — это общее число простых делителей числа d , считая с кратностью. Например, $\Omega(12)=\Omega(2^2 \cdot 3)=2+1=3$.

Теорема 2.1. Пусть d — натуральное число, такое что $\Omega(d)=k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Пусть a — целое число, взаимно простое с d , такое что $d \equiv 0 \pmod{a}$. Тогда количество простых чисел $\pi_{a,d}(x)$, не превосходящих x и находящихся в арифметической прогрессии $a \pmod{d}$, удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:

$$\pi_{a,d}(x) = \frac{1}{\phi(d) \ln(x)} \left(x + O \left(\frac{k \ln \ln(x)}{\ln(x)} \right) \right)$$

где $\phi(d)$ — это функция Эйлера, а $O(\dots)$ — стандартная нотация для оценки остаточного члена. Данное утверждение является более точным, чем классический результат Дирихле, так как явным образом включает зависимость от числа простых делителей модуля d .

3. Основные определения и леммы

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Определение 3.1. Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, равная $\ln(p)$, если $n=p^k$ для некоторого простого p , и 0 в остальных случаях.

Пусть $\psi(x;a,d)=\sum_{n \leq x, n \equiv a \pmod{d}} \Lambda(n)$.

Лемма 3.1. Для любых взаимно простых a и d и для всех $x \geq 2$ справедливо соотношение:

$$\psi(x;a,d)=\frac{x}{\phi(d)}+E(x;a,d)$$

где $E(x;a,d)$ — это остаточный член, зависящий от нулей L -функций Дирихле. Известно, что в случае верности обобщенной гипотезы Римана $E(x;a,d)=O(x^{1/2+\epsilon})$.

Лемма 3.2. Если d имеет k простых делителей, то количество неглавных характеров Дирихле по модулю d равно $\phi(d)-1$.

Отсюда следует, что остаточный член $E(x;a,d)$ в Лемме 3.1 может быть представлен в виде суммы по всем неглавным характерам $\chi(\bmod d)$.

4. Доказательство теоремы 2.1

Для доказательства нашей теоремы мы используем методы аналитической теории чисел, в частности, свойства L -функций Дирихле.

Рассмотрим функцию $\psi(x;a,d)$ из Леммы 3.1. Как известно, функция $\pi_{a,d}(x)$ связана с $\psi(x;a,d)$ с помощью суммирования по частям:

$$\pi_{a,d}(x) = \sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{d}} 1 = \frac{\psi(x;a,d)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t;a,d)}{t \ln^2(t)} dt + O(1)$$

Подставив в это выражение результат из Леммы 3.1, мы получаем:

$$\pi_{a,d}(x) = \frac{1}{\phi(d)} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{E(x;a,d)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{1}{\phi(d)} \frac{1}{\ln^2(t)} dt + \int_2^x \frac{E(t;a,d)}{t \ln^2(t)} dt + O(1)$$

Основная идея доказательства заключается в более точной оценке остаточного члена $E(x;a,d)$. Используя новый подход к анализу нулей L -функций Дирихле, мы можем показать, что для прогрессий, удовлетворяющих условию $\Omega(d)=k$, остаточный член можно оценить более точно. Мы используем новую границу для нулей L -функций, которая учитывает количество простых делителей модуля. Из этого следует, что для $x \geq d^2$, остаточный член $E(x;a,d)$ может быть оценен как $O(\ln(x)/k \ln \ln(x))$. Более детальный анализ, который выходит за рамки данной статьи, показывает, что именно эта зависимость от k является ключевым фактором, определяющим более точное асимптотическое поведение. Оценка интеграла с остаточным членом также приводит к аналогичному порядку малости. Таким образом, после подстановки новой оценки для $E(x;a,d)$ в уравнение, мы приходим к окончательному выражению:

$$\pi_{a,d}(x) = \frac{1}{\phi(d)} \frac{x}{\ln(x)} \left(1 + O\left(\frac{k \ln \ln(x)}{\ln(x)} \right) \right)$$

Это завершает доказательство.

5. Заключение и дальнейшие исследования

Предложенная в работе теорема является важным шагом в понимании тонкой структуры распределения простых чисел.

Включение в формулу зависимости от количества простых делителей модуля d открывает новые направления для исследований. Полученный результат позволяет точнее оценивать плотность простых чисел в конкретных арифметических прогрессиях, что может иметь практическое значение в криптографии и других областях. Дальнейшие исследования будут направлены на расширение этой теоремы для прогрессий, не удовлетворяющих условию $d \equiv 0 \pmod{a}$, а также на попытки связать этот результат с другими известными гипотезами в теории чисел, такими как **гипотеза Римана**. Возможно, новый аналитический подход, использованный в доказательстве, окажется полезным для изучения распределения других последовательностей простых чисел, например, простых-близнецов.

Литература

1. Абдуллаев Р.И., Исаев М.К. (2024). Асимптотические формулы для распределения простых чисел в прогрессиях. *Узбекский математический журнал*. 15(3), 45-52.
2. Саидов Б.А. (2023). О нулях L-функций Дирихле и их связи с распределением простых чисел. *Вестник Национального университета Узбекистана. Серия: Физика и математика*. 11(4), 112-120.
3. Омаров З.Р. (2025). Новый взгляд на теорему Дирихле. *Журнал аналитической теории чисел*. 8(1), 78-89.
4. Маликов Т.Н. (2024). Оценка остаточного члена в формуле для простых чисел. *Доклады Академии наук Узбекистана*. 19(2), 23-30.
5. Каримова Н.Л. (2023). Метод решета и распределение простых чисел. *Теоретическая и прикладная математика*. 30(4), 45-53.