



## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ: КРИТЕРИИ, МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

**Лебедев Максим Константинович**

Аспирант кафедры систем автоматического управления и контроля Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
г. Москва, Россия

### Аннотация

Данная работа представляет собой глубокое теоретическое исследование концепции устойчивости как фундаментального свойства систем автоматического управления (САУ). В статье проводится детальный разбор классического определения устойчивости по Ляпунову, а также анализируются границы применимости различных методов оценки стабильности для линейных и нелинейных систем. Автор подробно рассматривает алгебраические критерии, такие как критерий Рауса-Гурвица, и частотные методы, включая критерии Михайлова и Найквиста, исследуя их физический смысл и математическую логику. В работе уделено значительное внимание понятию запаса устойчивости по амплитуде и фазе, которые определяют надежность функционирования системы в условиях параметрической неопределенности. Проведен сравнительный анализ влияния обратных связей на стабилизацию неустойчивых объектов. Практическая значимость исследования заключается в систематизации подходов к проектированию отказоустойчивых систем управления, способных сохранять работоспособность при внешних возмущениях и изменении внутренних параметров.

**Ключевые слова:** устойчивость систем, теория автоматического управления, критерий Ляпунова, запас устойчивости, частотные методы, обратная связь, переходный процесс, критерий Найквиста, линейные системы, динамическая стабильность.

### Введение

Проблема устойчивости является центральной задачей теории автоматического управления. Любая техническая система, будь то беспилотный летательный аппарат, промышленный манипулятор или климатическая установка, должна обладать способностью возвращаться к заданному режиму функционирования после прекращения действия внешних возмущающих воздействий.

Если система неустойчива, малейшее отклонение от равновесия может привести к неограниченному росту выходных координат, что на практике означает аварию или разрушение объекта. Таким образом, обеспечение стабильности является первым и обязательным этапом проектирования любого контура управления.

Актуальность данной темы возрастает в связи с усложнением современной техники и переходом к высокодинамичным режимам работы. Современные системы часто функционируют в условиях высокой неопределенности и быстро меняющихся параметров среды, что предъявляет повышенные требования к методам анализа их устойчивости. В данной статье мы предпримем попытку детально разобрать иерархию методов оценки стабильности, переходя от общих теоретических определений к практическим критериям, используемым инженерами при расчете сложных динамических систем.

### **Понятие устойчивости по Ляпунову и физический смысл равновесия**

В основе современной теории стабильности лежит фундаментальный труд Александра Михайловича Ляпунова. Его определение устойчивости базируется на анализе поведения системы в окрестности точки равновесия. Система называется устойчивой, если при малых начальных отклонениях её траектории остаются в некоторой ограниченной области пространства состояний. Более строгое понятие — асимптотическая устойчивость — подразумевает, что система со временем не просто остается в границах, а полностью возвращается в исходное состояние равновесия.

Физически устойчивость можно представить как движение шарика в чаше: при любом смещении он стремится вернуться на дно. Неустойчивая система подобна шарiku на вершине купола, где малейший толчок вызывает падение. Ляпунов предложил два метода анализа. Первый (непрямой) метод заключается в линеаризации уравнений системы и анализе корней характеристического уравнения. Второй (прямой) метод базируется на поиске специальной функции — функции Ляпунова, которая характеризует полную энергию системы. Если такая функция постоянно убывает во времени, система гарантированно устойчива, даже если её уравнения крайне сложны и нелинейны. Этот подход остается самым мощным инструментом анализа стабильности в современной науке.

### **Алгебраические критерии устойчивости линейных систем**

Для линейных стационарных систем устойчивость полностью определяется расположением корней их характеристического уравнения на комплексной плоскости. Система устойчива тогда и только тогда, когда все корни имеют отрицательные вещественные части, то есть расположены в левой полуплоскости. Однако для систем высокого порядка прямое нахождение корней является трудоемкой задачей. Здесь на помощь приходят алгебраические критерии, позволяющие судить об устойчивости по коэффициентам самого уравнения.

Критерий Рауса-Гурвица является классическим примером такого подхода. Он заключается в построении специальной таблицы или определителей из коэффициентов уравнения. Анализ знаков полученных величин позволяет сделать вывод о наличии корней в правой полуплоскости. Основное достоинство этих критериев — их алгоритмичность, что делает их идеальными для использования в программном обеспечении для автоматизированного проектирования. Однако алгебраические методы обладают существенным недостатком: они лишь дают ответ на вопрос «устойчива система или нет», но не показывают, насколько она близка к границе устойчивости и как именно нужно изменить параметры регулятора для улучшения ситуации.

### **Частотные методы анализа: годографы и логарифмические характеристики**

Частотный подход, развитый в работах Найквиста и Михайлова, переносит анализ стабильности в область комплексных частотных характеристик. Это позволяет исследовать систему не через сложные дифференциальные уравнения, а через реакцию системы на гармонические сигналы различной частоты. Критерий Найквиста является мощнейшим инструментом, так как он позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по частотным характеристикам её разомкнутой части.

Графически критерий Найквиста сводится к анализу охвата точки с координатами минус единица на комплексной плоскости годографом амплитудно-фазовой частотной характеристики. Если годограф не охватывает эту критическую точку, система в замкнутом состоянии будет стабильной. Этот метод незаменим при проектировании систем с запаздыванием, где алгебраические методы практически бессильны. Аналогичную логику использует критерий Михайлова, где анализируется изменение фазового угла характеристического полинома при изменении частоты от нуля до бесконечности. Для устойчивой системы кривая Михайлова должна последовательно обходить квадранты комплексной плоскости, не проходя через начало координат.

### **Запасы устойчивости и их роль в надежности управления**

В инженерной практике недостаточно просто констатировать факт устойчивости. Любая реальная система имеет допуски при производстве, температурный дрейф параметров и подвержена старению. Поэтому вводится критически важное понятие запаса устойчивости. Оно характеризует расстояние от текущего состояния системы до границы, за которой начинается самовозбуждение и потеря стабильности.

Различают запас устойчивости по амплитуде и запас по фазе. Запас по амплитуде показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент усиления системы до того, как она станет неустойчивой. Запас по фазе определяет допустимую величину фазового запаздывания в контуре управления. Обычно для надежной работы современных технических систем требуется запас по фазе не менее тридцати-сорока пяти градусов.

Анализ этих показателей проводится с помощью логарифмических частотных характеристик (диаграмм Бode), которые позволяют визуально оценить качество управления и устойчивость системы на разных частотных диапазонах.

### **Влияние структуры и обратных связей на стабильность**

Устойчивость системы не является застывшим свойством; она радикально зависит от структуры соединений и выбранного закона управления. Отрицательная обратная связь является универсальным средством стабилизации, однако при неправильной настройке параметров регулятора (например, чрезмерно высоком коэффициенте усиления) она сама может стать причиной возникновения незатухающих колебаний.

Введение дифференцирующих звеньев в закон управления (например, использование ПИД-регулятора) позволяет улучшить устойчивость за счет «предсказания» будущего состояния системы и демпфирования переходных процессов. С другой стороны, интегрирующие звенья, необходимые для устранения статической ошибки, часто снижают запас устойчивости, внося дополнительный фазовый сдвиг. Балансировка этих противоречивых требований является искусством проектирования САУ. В сложных многосвязных системах стабильность может зависеть от взаимодействия нескольких контуров управления, что требует использования методов матричного анализа и структурного моделирования.

### **Стабильность в цифровых и адаптивных системах**

Переход от аналоговых систем к цифровым микропроцессорным контроллерам внес новые аспекты в проблему устойчивости. В дискретных системах стабильность зависит не только от параметров объекта, но и от периода квантования по времени. Слишком редкое снятие показаний датчиков может привести к потере устойчивости даже изначально стабильного процесса из-за накопления ошибки между тактами управления. Для анализа таких систем используется  $Z$ -преобразование и перенос области устойчивости внутрь единичного круга на комплексной плоскости.

Особую сложность представляют адаптивные системы управления, которые подстраивают свои параметры «на ходу». В этом случае устойчивость должна гарантироваться для всего диапазона возможных изменений параметров. Здесь часто применяются методы гиперустойчивости и теории пассивности, позволяющие доказать, что при определенных ограничениях на алгоритм адаптации система никогда не выйдет из устойчивого режима, независимо от конкретных значений внешних возмущений. Это критически важно для систем управления беспилотным транспортом и энергетическими сетями.

## Заключение

Исследование стабильности систем управления подтверждает, что устойчивость является динамическим балансом между внутренними силами объекта и внешними управляющими воздействиями. Мы установили, что современный аппарат теории автоматического управления предоставляет исчерпывающий набор инструментов — от классических функций Ляпунова до частотных критериев Найквиста и Боде — позволяющих не только оценить факт стабильности, но и количественно измерить её надёжность.

Основной вывод работы заключается в том, что проектирование устойчивых систем требует междисциплинарного подхода, учитывающего математическую структуру модели, физические ограничения актуаторов и задержки в информационных каналах. Понимание границ устойчивости позволяет создавать системы, работающие на пределе своих возможностей без риска потери контроля. Дальнейшее развитие теории стабильности будет связано с анализом крупномасштабных сетевых структур и систем с переменной топологией, где локальная устойчивость каждого узла должна обеспечивать глобальную стабильность всей сети в условиях непредсказуемых внешних воздействий.

## Литература

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. М.: Профессия, 2003. 752 с.
2. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы. М.: Энергоатомиздат, 1980. 312 с.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 396 с.
4. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
5. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
6. Khalil H. K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. 750 p.
7. Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A. Feedback Control of Dynamic Systems. 8th ed. Harlow: Pearson, 2019. 880 p.
8. Åström K. J., Murray R. M. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton: Princeton University Press, 2008. 408 p.