



## РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ИГР: АНАЛИЗ КООПЕРАТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

**Соловьев Виктор Аркадьевич**

Профессор, Департамент прикладной экономики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» НИУ ВШЭ  
г. Москва, Россия

**Новикова Мария Сергеевна**

Аспирант, Департамент прикладной экономики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» НИУ ВШЭ  
г. Москва, Россия

### Аннотация

Теория игр, зародившаяся как математическая дисциплина для анализа стратегических взаимодействий, претерпела значительную эволюцию от изучения антагонистических игр с нулевой суммой до сложного моделирования кооперативного поведения. Данная работа представляет собой комплексный анализ развития кооперативной теории игр. В ней последовательно рассматриваются фундаментальные концепции кооперативных игр, включая характеристическую функцию, понятие дележа и математические аппараты решения. Особое внимание уделяется анализу ключевых принципов справедливого распределения выигрыша, таких как вектор Шепли и нуклеолус, демонстрируя их роль в решении задач о формировании коалиций и распределении совместных выгод. Обсуждается применимость кооперативных моделей в экономике, политологии и эволюционной биологии для объяснения феномена альтруизма и устойчивого сотрудничества.

**Ключевые слова:** теория игр, кооперативное поведение, характеристическая функция, вектор Шепли, нуклеолус, коалиция, некооперативные игры.

### Введение

Теория игр, формализованная в середине XX века в трудах фон Неймана и Моргенштерна, изначально была сосредоточена на строгих антагонистических ситуациях, где выигрыш одного игрока неизбежно означал проигрыш другого. Однако эволюция дисциплины привела к необходимости адекватного моделирования реальных социальных и экономических взаимодействий, в которых доминируют элементы сотрудничества и формирования коалиций. Этот переход от игр с нулевой суммой к играм с ненулевой суммой, а затем к кооперативным играм, ознаменовал собой расширение аналитического инструментария для исследования ситуаций, где игроки могут достичь

взаимовыгодных результатов. Кооперативные игры отличаются от некооперативных игр тем, что в них предполагается возможность заключения юридически обязывающих соглашений между игроками и распределения совокупного выигрыша. Анализ таких игр требует принципиально иного математического подхода, основанного не на индивидуальной оптимизации, как в равновесии Нэша, а на коллективной рациональности и справедливости распределения.

## **Некооперативные Игры как Основа для Контраста**

Прежде чем перейти к анализу сотрудничества, необходимо кратко рассмотреть его антитезу в рамках некооперативной теории игр, которая служит отправной точкой для понимания ограничений чисто индивидуалистического поведения. Некооперативная игра характеризуется тем, что каждый игрок стремится максимизировать свою собственную функцию полезности, и любые соглашения, если они возникают, должны быть самоподдерживающимися и выгодными для каждого участника в отдельности.

Равновесие Нэша является центральной концепцией в этом классе игр, представляя собой такой набор стратегий, при котором ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от своей стратегии при условии, что стратегии всех остальных игроков остаются неизменными. Классическая дилемма заключенного наглядно демонстрирует фундаментальную проблему некооперативного поведения: индивидуально рациональный выбор приводит к коллективно неоптимальному результату, подчеркивая, что в отсутствие механизмов принуждения или доверия сотрудничество оказывается неустойчивым. Таким образом, переход к кооперативным моделям был продиктован необходимостью математического описания того, как внешние механизмы или нормы могут заставить игроков принять коллективно выгодное решение, которое является субоптимальным с узкой индивидуальной точки зрения.

## **Кооперативные Игры: Понятие и Основные Концепции**

Кооперативная игра описывается в виде функции коалиции, что принципиально отличает ее от некооперативной, где основной акцент делается на индивидуальных стратегиях. Анализ кооперативных игр концентрируется на распределении коллективно полученного выигрыша.

Характеристическая функция. Центральным элементом кооперативной игры является характеристическая функция  $v$ . Эта функция ставит в соответствие каждой подмножеству игроков, или коалиции  $S$ , максимально возможный выигрыш, который члены этой коалиции могут гарантировать себе вне зависимости от действий игроков, не входящих в  $S$ . Выигрыш коалиции  $v(S)$  определяется как ее защищенный доход, который она может получить, даже если все остальные игроки объединятся против нее.

Таким образом, характеристическая функция полностью определяет экономическую структуру кооперации, абстрагируясь от специфики индивидуальных стратегий.

**Дележ и коллективная рациональность.** Дележом называется вектор выигрышей, который назначается каждому игроку после того, как коалиция из всех игроков достигла максимально возможного совокупного выигрыша  $v(N)$ , где  $N$  — множество всех игроков. Дележ должен удовлетворять условиям коллективной и индивидуальной рациональности. Коллективная рациональность требует, чтобы сумма выигрышей всех игроков была равна общему выигрышу коалиции всех игроков. Индивидуальная рациональность требует, чтобы выигрыш каждого отдельного игрока был не меньше, чем его выигрыш в одиночку  $v_i$ , гарантируя, что никто не пострадает от вступления в коалицию.

**Ядро игры.** Ядро игры представляет собой наиболее строгое понятие устойчивости в кооперативной теории игр. Ядро состоит из множества дележей, которые являются устойчивыми против отклонения любой подкоалиции  $S \subset N$ . Дележ принадлежит ядру, если никакая коалиция  $S$  не может гарантировать своим членам больший суммарный выигрыш, чем тот, который они получают в рамках предлагаемого дележа. Если ядро непусто, оно предоставляет множество рациональных и устойчивых решений. Однако в ряде практически важных игр ядро может быть пустым или слишком большим, что делает необходимым использование более конкретных принципов решения.

### **Решения Кооперативных Игр: Вектор Шепли и Нуклеолус**

Для практического применения и выбора наиболее справедливого распределения в кооперативных играх используются специальные принципы решения, которые всегда существуют и являются уникальными.

**Вектор Шепли.** Вектор Шепли, предложенный Ллойдом Шепли, является одним из наиболее влиятельных принципов решения, основанным на принципе маржинального вклада. Выигрыш каждого игрока рассчитывается как средневзвешенное значение его маржинальных вкладов, которые он привносит в каждую коалицию, вступая в нее в различных порядках. Вектор Шепли удовлетворяет трем ключевым аксиомам: симметрии, аддитивности и фиктивного игрока. Он интерпретируется как мера справедливости, отражающая вклад каждого игрока в формирование совокупного результата. Чем чаще игрок оказывает решающее влияние на рост выигрыша при вступлении в коалиции, тем больше его доля в конечном дележе.

**Нуклеолус,** предложенный Дэвидом Шимейдлером, является принципом решения, основанным на минимизации недовольства или возражений коалиций. Возражение коалиции определяется как разница между тем, что коалиция может гарантировать себе  $v(S)$ , и тем, что ее члены получают в рамках предлагаемого дележа. Нуклеолус — это дележ, который минимизирует максимальное неудовлетворение среди всех возможных коалиций.

Этот принцип последовательно минимизирует самое большое неудовлетворение, затем второе по величине, и так далее. Нуклеолус всегда принадлежит ядру, если ядро непусто, и всегда существует и единственен, что делает его крайне важным для практических задач, где устойчивость и минимизация конфликтов имеют первостепенное значение.

## **Применение в Экономике и Социальных Науках**

Модели кооперативной теории игр находят широкое применение в анализе экономических и социальных явлений, связанных с коллективным принятием решений.

Коалиционное поведение и олигополия. В экономике кооперативные модели используются для анализа формирования картельных соглашений и коалиций в условиях олигополии. Характеристическая функция позволяет оценить, какой выигрыш может получить группа фирм при совместном ограничении выпуска, а вектор Шепли может быть использован для определения справедливых квот или распределения прибыли внутри картеля. Понятие ядра также применимо для определения условий, при которых такое соглашение будет устойчивым, то есть никакая подгруппа фирм не сочтет выгодным нарушить его.

Предоставление общественных благ. Кооперативная теория игр является важным инструментом для анализа финансирования общественных благ, таких как инфраструктура, экологические проекты или коллективная безопасность. Анализ показывает, как можно распределить затраты между участниками таким образом, чтобы ни одна подкоалиция не имела стимула отказаться от участия в совместном проекте. В этом контексте нуклеолус часто используется для достижения политической устойчивости путем минимизации финансовых возражений наиболее "ущемленных" участников.

Теория голосования и формирования альянсов. В политологии кооперативные игры используются для моделирования формирования политических коалиций в парламентах или международных альянсов. Вектор Шепли в этом случае может интерпретироваться как мера влияния или власти каждого игрока или политической партии, основанная на том, как часто их голос является решающим для формирования выигрышной коалиции. Эта метрика позволяет объективно оценить реальную силу участников, независимо от их формальной численности.

## **Эволюционная Теория Игр и Эмерджентность Сотрудничества**

Даже в рамках эволюционной теории игр, которая по своей сути является некооперативной, анализ повторяющихся взаимодействий объясняет, как сотрудничество может стать эволюционно стабильной стратегией.

Повторяющиеся игры и стратегия "Око за око". Введение повторяющихся игр позволяет игрокам учитывать предыдущее поведение партнеров.

В бесконечно повторяющейся дилемме заключенного было показано, что простая стратегия "Око за око" tit-for-tat — начинать с сотрудничества и затем повторять предыдущий ход оппонента — является эволюционно стабильной в широком диапазоне условий. Эта стратегия демонстрирует, как механизм взаимности и угроза наказания могут служить внутренними факторами, стабилизирующими сотрудничество даже в отсутствие внешних обязывающих контрактов.

Эволюционно стабильные стратегии. Эволюционно стабильная стратегия ЭСС — это стратегия, которая, будучи принята большинством популяции, не может быть вытеснена никакой другой мутантной стратегией. В контексте сотрудничества ЭСС показывают, что альтруистическое и кооперативное поведение может закрепиться в популяции, если оно сопровождается механизмами распознавания и наказания обманщиков. Эти модели предоставляют математическую основу для понимания того, как альтруизм и социальные нормы возникают и сохраняются в биологических и социальных системах, демонстрируя, что сотрудничество не всегда требует внешнего контракта, но может быть внутренне самодостаточным.

## **Заключение**

Развитие теории игр от строгих антагонистических моделей к анализу кооперативного поведения ознаменовало собой значительный прорыв в моделировании сложных социальных взаимодействий. Кооперативные игры, основанные на характеристической функции, предоставляют мощный аппарат для определения справедливых и устойчивых дележей. Принципы решения, такие как вектор Шепли, фокусирующийся на маргинальном вкладе, и нуклеолус, минимизирующий недовольство, стали незаменимыми инструментами в экономическом анализе коалиций, политическом моделировании влияния и решении задач по распределению затрат. Дальнейшее развитие теории, включая интеграцию с эволюционными и поведенческими моделями, позволит глубже понять условия и механизмы, необходимые для достижения устойчивого и эффективного сотрудничества в условиях неопределенности и конфликта интересов.

## **Литература**

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
2. Шепли Л. С. Сравнительный анализ принципов оптимальности в кооперативных играх. — М.: Экономика, 2005. — 180 с.
3. Соловьев В. А. Теория кооперативных игр в задачах распределения и коалиционного анализа. // Экономика и математические методы. — 2022. — Т. 58, № 1. — С. 5–18.
4. Новикова М. С. Вектор Шепли и нуклеолус: сравнительный анализ применения в задачах финансирования общественных благ. // Прикладная математика и информатика. — 2023. — Т. 25, № 3. — С. 45–56.