



ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аннадурдыева Бахар Сапаровна

Преподаватель, Туркменский государственный университет имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Шаджанов Мухаммет Аманназарович

Преподаватель, Международного университета нефти и газа имени Ягшыгелди
Какаева
г. Ашхабад Туркменистан

Аннотация

В статье рассматриваются базовые элементы теории вероятностей — случайные события, способы задания вероятности, аксиомы и свойства вероятностной меры. Приведены примеры применения вероятностных моделей в прикладных задачах. Особое внимание уделяется классическому, статистическому и геометрическому определениям вероятности, аксиомам Колмогорова, а также законам сложения и умножения вероятностей. Рассматриваются условные вероятности, независимость событий и формула Байеса. Цель статьи — систематизация ключевых положений теории вероятностей и демонстрация их практической значимости.

Ключевые слова: вероятность, случайные события, аксиомы Колмогорова, условная вероятность, формула Байеса, независимость событий, вероятностная модель.

1. Введение

Случайность окружает нас повсюду: от игры в кости до прогнозов погоды и моделей фондового рынка. Для описания и анализа неопределенности применяется теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Современная теория вероятностей базируется как на строгих аксиоматических основах, так и на богатом прикладном опыте.

Исторически теория вероятностей возникла в XVII веке в связи с задачами азартных игр, однако с тех пор её область применения значительно расширилась. В настоящее время она используется в таких областях, как статистика, физика, биология, экономика, информатика и даже философия.

Математическая формализация понятий «вероятность» и «случайность» позволяет строить модели, прогнозировать поведение сложных систем и принимать решения в условиях неопределенности.

2. Случайные события и пространство элементарных исходов

Случайное событие — это результат некоторого эксперимента, который может либо произойти, либо нет. Примеры: выпадение определенного числа на игральной кости, дождь завтра, выигрыш в лотерее.

Пространство элементарных исходов Ω — множество всех возможных исходов случайного эксперимента. Элементы $\omega \in \Omega$ называются **элементарными исходами**.

Событие $A \subseteq \Omega$ — подмножество исходов, при которых считается, что событие произошло.

Пример:

Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — возможные исходы при броске кости. Событие $A = \{2, 4, 6\}$ — выпадет чётное число.

3. Способы задания вероятности

Существует несколько подходов к определению вероятности.

3.1 Классическое определение вероятности

Если все элементарные исходы равновозможны и конечны, то:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где m — число исходов, благоприятствующих событию A , а n — общее число исходов.

Пример: вероятность выпадения четного числа при броске кости:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

3.2 Статистическое определение вероятности

Используется при проведении серии опытов:

$$P(A) \approx \frac{m}{n},$$

где m — число случаев появления события A , n — общее число опытов. Чем больше n , тем точнее приближение.

3.3 Геометрическое определение вероятности

Применяется, когда множество исходов непрерывно. Вероятность определяется как отношение меры (например, длины, площади) благоприятной области к мере всей области.

4. Аксиомы Колмогорова и свойства вероятности

Современное аксиоматическое построение вероятности принадлежит А.Н. Колмогорову (1933). Вероятностное пространство — это тройка (Ω, F, P) , где:

- Ω — пространство элементарных исходов;
- F — алгебра (сигма-алгебра) подмножеств Ω ;
- P — вероятностная мера, удовлетворяющая аксиомам:

1. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in F$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Для попарно несовместных событий A_i :

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Основные свойства:

- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

5. Законы вероятностей

5.1 Закон сложения вероятностей

Для любых событий A и B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если $A \cap B = \emptyset$, то:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

5.2 Закон умножения вероятностей

Для независимых событий:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Для зависимых:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

где $P(B/A)$ — условная вероятность события ВВ при условии, что произошло А.

6. Условная вероятность и независимость событий

6.1 Условная вероятность

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{если } P(A) > 0.$$

6.2 Независимость событий

События А и В называются независимыми, если:

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{или} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

7. Формула полной вероятности и формула Байеса

7.1 Формула полной вероятности

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ — полная группа несовместных событий, $P(H_i) > 0$. Тогда для любого события А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i).$$

7.2 Формула Байеса

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}.$$

Эта формула позволяет **пересчитывать вероятность гипотезы** после появления новой информации. Используется в медицине, биоинформатике и машинном обучении.

8. Примеры задач

Пример 1

В урне 3 белых и 2 черных шара. Извлекается 1 шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

Решение:

$$P(\text{белый}) = 3/5.$$

Пример 2

На предприятии 60% продукции — от первого поставщика (брак 5%), 40% — от второго (брак 10%). Найти вероятность, что случайно выбранная деталь окажется бракованной.

$$P(\text{Брак})=0,6\cdot0,05+0,4\cdot0,10=0,03+0,04=0,07.$$

9. Заключение

Теория вероятностей представляет собой фундаментальный математический аппарат для анализа неопределённости. Она опирается на строгие аксиоматические основания, при этом её методы обладают широчайшим спектром прикладных применений. Освоение понятий случайных событий, вероятностных законов и формул Байеса позволяет эффективно моделировать, анализировать и предсказывать поведение сложных систем в науке и технике.

Литература

1. Колмогоров А.Н. *Основы теории вероятностей*. — М.: Наука, 1974.
2. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. — М.: Наука, 2009.
3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*. — М.: Мир, 1964.
4. Чапман С., Уэстбрук Э. *Математика вероятностей*. — СПб.: Питер, 2018.
5. Лойка Е.Д. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — Минск: БГУ, 2021.
6. Ширяев А.Н. *Вероятность*. — М.: МЦНМО, 2008.
7. Grimmett G., Stirzaker D. *Probability and Random Processes*. — Oxford University Press,