НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
НАУКА И МИРОВОЗЗРЕНИЕ

УДК-51.3

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Рахманбердиев Ашырмухаммет

Преподаватель, Международного университета нефти и газа имени Ягшыгелди Какаева
г. Ашхабад Туркменистан

Борджаков Батыр

Студент, Международного университета нефти и газа имени Ягшыгелди Какаева
г. Ашхабад Туркменистан

Аннаниязов Мердан

Студент, Международного университета нефти и газа имени Ягшыгелди Какаева
г. Ашхабад Туркменистан

Аннотация. В Гильбертовом пространстве исследован класс нелинейных операторных уравнений первого рода. Построено приближенное решение, устойчивое относительно исходных данных задач. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения. Произведен выбор параметра регуляризации от погрешностей.

Ключевые слова: Операторное уравнение, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода.

ВВЕДЕНИЕ

Для регуляризации решения линейного и нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве посвящены работы авторов. Ранее авторами построены регуляризирующие операторы для решения операторного уравнения первого рода, когда предполагаемое точное решение истокообразно представимо через линейный оператор.

В данной работе исследовано операторное уравнение, когда линейный оператор является самосопряженным, положительным и предполагаемое точное решение истокообразно представимо через нелинейный оператор.

Пусть заданы операторы

$Az=\int_0^1 tz(s)ds,$ $AK(z)=\int_0^1 tsz^2(s)ds$

Тогда исследуемое уравнение запишется в виде

$$\int_0^1 tz(s)ds=u(t)+\int_0^1 tsz^2(s)ds \qquad (1)$$

Допустим, что при $U_0(t)=t/4$ уравнение (1) имеет точное решение $z_0(t)$ представимо в виде

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 tv_0(s)ds$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z_\alpha(t)+\int_0^1 tz_\alpha(s)ds=\frac{t}{4}+\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t). \qquad (2)$$

Введем обозначение

$$f_\alpha(t)=\frac{t}{4}+\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t). \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) запишется в виде:

$$\alpha z_\alpha(t)+\int_0^1 tz_\alpha(s)ds=f_\alpha(t). \qquad (4)$$

Введем обозначение

$$c=\int_0^1 z_\alpha(s)ds, \qquad (5)$$

то из (4) имеем

$$\alpha z_\alpha(t)+ct=f_\alpha(t)$$

или

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha}f_\alpha(t)-\frac{c}{\alpha}t. \qquad (6)$$

Для того чтобы найти постоянную С, формулу (6) подставим в (5):

$$c=\int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}f_\alpha(s)-\frac{c}{\alpha}s\right)ds=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 f_\alpha(s)ds-\frac{c}{\alpha}\int_0^1 sds=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 f_\alpha(s)ds-\frac{c}{2\alpha}. \qquad (7)$$

Найдем из (7) значение С:

$$c\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}f_\alpha$$

$$c=\frac{2}{2\alpha+1}f_\alpha, \qquad (8)$$

Где

$$f_\alpha=\int_0^1 f_\alpha(s)ds=\int_0^1\left[\frac{s}{4}+\left(\alpha E+\int_0^1 s\tau(\cdot)d\tau\right)z_\alpha^2(s)\right]ds=\frac{1}{4}\int_0^1 sds+$$

$$\alpha\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds+\int_0^1\int_0^1 s\tau\cdot z_\alpha^2(\tau)d\tau ds=\frac{1}{8}+\alpha\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1 sz_\alpha^2(s)ds.$$

Значение f_α подставим в (8) ,имеем

$$c=\frac{1}{4(2\alpha+1)}+\frac{2\alpha}{2\alpha+1}\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds+\frac{1}{2\alpha+1}\int_0^1 sz_\alpha^2(s)ds. \qquad (9)$$

Формулы (9) и (3) подставим в (6) и получим

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{t}{4}+\alpha z_\alpha^2(t)+\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds\right]-\frac{t}{\alpha}\left[\frac{1}{4(2\alpha+1)}+\frac{2\alpha}{2\alpha+1}\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\alpha+1}\int_0^1 sz_\alpha^2(s)ds\ \right]=\frac{t}{2(2\alpha+1)}+\frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds+z_\alpha^2(t)-\frac{2t}{2\alpha+1}\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds= \qquad (10).$$

$$=\frac{t}{2(2\alpha+1)}+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha z_\alpha^2(t)+\int_0^1 tsz_\alpha^2(s)ds\right)+\frac{1}{2\alpha+1}\left(z_\alpha^2(t)-2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds\right).$$

По предположению точное решение $z_0(t)$ уравнения (1) представимо в виде

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 tv_0(s)ds, \qquad (11)$$

где элемент $v_0(t)$ имеет вид

$$v_0(t)=2z_0(t)-2z_0^2(t). \qquad (12)$$

(12) подставим в (11):

$$z_0(t)-z_0^2(t)=\int_0^1 t\left(2z_0(s)-2z_0^2(s)\right)ds=2t\int_0^1 z_0(s)ds-2t\int_0^1 z_0^2(s)ds.$$

Отсюда получаем, что

$$z_0(t)\equiv 2t\int_0^1 z_0(s)ds. \qquad (13)$$

$$z_0^2(t)\equiv 2t\int_0^1 z_0^2(s)ds. \qquad (14)$$

Из тождества (14) получаем предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(z_\alpha^2(t)-2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds\right)=z_0^2(t)-2t\int_0^1 z_0^2(s)ds=0. \qquad (15)$$

Из (15) следует верность равенства

$$z_\alpha^2(t)=2t\int_0^1 z_\alpha^2(s)ds. \qquad (16)$$

В силу (16) формула (10) запишется в виде

$$z_\alpha(t)=\frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{t}{4}+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E+\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)z_\alpha^2(t). \qquad (17)$$

Переходя к пределу при $\alpha\to 0$ из (17) имеем

$$z_0(t)=2\cdot\frac{t}{4}+2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds. \qquad (18)$$

Уравнение (1) при $u_0(t)=t/4=$ имеет точное решение $z_0(t)$, в этом случае имеет место тождество

$$\int_0^1 tz_0(s)ds\equiv\frac{t}{4}+\int_0^1 tsz_0^2(s)ds, \qquad (19)$$

тогда из (18) имеем

$$z_0(t)=2\int_0^1 tz_0(s)ds. \qquad (20)$$

В силу тождества (13) из (20) получим тождество

$z_0(t)= z_0(t)$ (21)

Тождество (21) показывает, что действительно (18) является решением уравнения

$$z_\alpha^0 - z_0 = \frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{t}{4} + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{0\,2}(t)) - 2\cdot\frac{t}{4} - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds =$$

$$= \frac{2}{2\alpha+1}\left(\int_0^1 tz_0(s)ds - \int_0^1 tsz_0^2(s)ds\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right) z_\alpha^{0\,2}(t)) -$$

$$-2\left(\int_0^1 tz_0(s)ds - \int_0^1 tsz_0^2(s)ds\right) - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds = \frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tz_0(s)ds - \frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 tsz_0^2(s)ds +$$

$$+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)z_\alpha^{0\,2}(t)\right) - 2\int_0^1 tz_0(s)ds + 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds - 2\int_0^1 tsz_0^2(s)ds =$$

$$= -\alpha\cdot\frac{2}{2\alpha+1}\left(z_0(t) - z_0^2(t)\right) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\left(z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right) =$$

$$= -\alpha\cdot\frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 t(\cdot)dsv_0(t) + \frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\left(z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right).$$

Рассмотрим норму разности $z_\alpha^0 - z_0$

$$\left\|z_\alpha^0 - z_0\right\| \le \alpha\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\int_0^1 t(\cdot)ds\right\|\cdot\left\|v_0(t)\right\| + \left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E + \int_0^1 ts(\cdot)ds\right)\right\|\cdot\left\|z_\alpha^{0\,2}(t) - z_0^2(t)\right\| \le$$

$$\le \alpha\cdot\left\|v_0(t)\right\| + 2N\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\|, \qquad (22)$$

где

$$\left\|z_\alpha^0(t) + z_0(t)\right\| = N.$$

Отсюда при условии N<0,5 имеем

$$\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\| \le \frac{\alpha\cdot\left\|v_0(t)\right\|}{1-2N}. \qquad (23)$$

Из оценки следует, что при $\alpha \to 0$ т.е. решение уравнения (16) является приближенным решением уравнения (1).

Тогда решение уравнения (16) в силу представления (17) запишется в виде:

$$z_{\alpha}^{\delta}(t)=\frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4}+\delta\right)+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E+\int_{0}^{1}ts(\cdot)ds\right)z_{\alpha}^{\delta^2}(t)\,. \qquad (24)$$

Оценим разность $z_{\alpha}^{\delta}-z_0$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta}-z_{\alpha}\right\|\le\left\|z_{\alpha}^{\delta}-z_{\alpha}^{0}\right\|+\left\|z_{\alpha}^{0}-z_{0}\right\|. \qquad (25)$$

Второе слагаемое в правой части (25) удовлетворяет неравенству (23).
Оценим первое слагаемое в правой части (25)

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta}-z_{\alpha}^{0}\right\|=\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4}+\delta\right)+\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E+\int_{0}^{1}ts(\cdot)ds\right)z_{\alpha}^{\delta^2}(t)-\frac{2}{2\alpha+1}\cdot\frac{t}{4}\right\|-$$

$$-\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\alpha E+\int_{0}^{1}ts(\cdot)dsz_{\alpha}^{0^2}\right)\right\|\le\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\left(\frac{t}{4}+\delta-\frac{t}{4}\right)\right\|+\left\|\frac{2}{2\alpha+1}\right\|\times$$

$$\times\left\|\alpha E+\int_{0}^{1}ts(\cdot)ds\right\|\cdot\left\|z_{\alpha}^{\delta^2}-z_{\alpha}^{0^2}\right\|\le\frac{\delta}{\alpha}+2N\left\|z_{\alpha}^{\delta^2}-z_{\alpha}^{0^2}\right\|.$$

Отсюда при 2N<0,5 имеем

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta^2}-z_{\alpha}^{0}\right\|\le\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N}. \qquad (26)$$

Тогда в силу неравенств (23) и (26) из (25) имеем

$$\left\|z_{\alpha}^{\delta}-z_{0}\right\|\le\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{1-2N}+\frac{\alpha\cdot\left\|v_0(t)\right\|}{1-2N}. \qquad (27)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{1-2N}=c_1, \qquad \left\|v_0(t)\right\|\cdot c_1=c_2. \qquad (28)$$

После введенных обозначений неравенство (27) запишется в виде:

$$\left\| z_{\alpha}^{\delta} - z_0 \right\| \le c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha} + c_2 \cdot \alpha. \qquad (29)$$

Правая часть неравенства (29) является функцией от параметра α т.е.

$$\psi(\alpha) = c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha} + c_2 \cdot \alpha. \qquad (30)$$

Найдем минимум этой функции

$$\psi'(\alpha) = -c_1 \cdot \frac{\delta}{\alpha^2} + c_2 = 0.$$

Отсюда находим зависимость параметра регуляризации от погрешности δ, т.е.

$$\alpha(\delta) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\delta}. \qquad (31)$$

Найденное значение α подставим в правую часть (30) и имеем

$$\psi(\alpha(\delta)) = 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \qquad (32)$$

Тогда неравенство (29) имеет вид

$$\left\| z_{\alpha(\delta)}^{\delta} - z_0 \right\| \le 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \qquad (33)$$

Отсюда следует, что при $\delta \to 0$

$$z_{\alpha(\delta)}^{\delta} \to z_0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Построено приближенное решение нелинейного интегрального уравнения I-го рода в случае, когда решение принадлежит $L_2\,(0,1)$ - пространству квадратично суммируемых функций. Здесь уравнение второго рода является уравнением Эйлера для сглаживающего функционала Тихонова нулевого порядка. Получена сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения при стремлении параметра к нулю.