



ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА НА ПРОСТРАНСТВЕ

Гарлыева Сахрагул Гелдимырадовна

Студент Туркменский государственный университет имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Изучая какие-либо физические явления, исследователь, прежде всего, создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, т.е. пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде интегральных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений, в электростатике, гидростатике и многих других разделов физики.

Также интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях, таких как, теории упругости, гидростатике, экономике, медицине и т.д. В работе изложены характерные особенности интегральных уравнений и их классификация. Она является одним из разделов математического анализа.

Фредгольм (Fredholm) Эрик Ивар (7.4.1866, Стокгольм, – 17.8.1927, Мёрбю), шведский математик. Окончил Стокгольмский университет (1893), с 1906 профессор там же. Основные труды по интегральным уравнениям. В 1900 изложил основные свойства и теоремы теории интегральных уравнений, разработал общие методы решения некоторых их видов (т.н. уравнения Фредгольма).

Решение линейных интегральных уравнений актуально в наше время. Интегральные уравнения помогают в решении множества задач, которые порой невозможно или очень не рационально решать другим способом. На сегодняшний день полноценный раздел, имеющий большое практическое значение в задачах радиоэлектронике, экологии и формировании многих физических процессов. Чтобы охарактеризовать ее место в современной математической науке, прежде всего, необходимо подчеркнуть основные понятия интегральных уравнений. Актуальность работы. Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи

подобного типа, принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Один из классов таких некорректных задач составляют интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Приводится большое число прикладных задач, в том числе, задач математической обработки (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, рассмотрены отдельные методы.

При исследовании природных явлений в виде интегральных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом.

Целью нашей работы является рассмотрение особенностей интегральных уравнений Фредгольма и изучение применения этого метода в механических и физических явлениях. Для поставленной цели необходимо решить задачи:

1 Рассмотреть понятие интегрального уравнения;

2 Рассмотреть однородные и неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода;

3 Изучить методы решения интегральных уравнений Фредгольма.

4 Показать приемы решения интегральных уравнений в различных физических явлениях и процессах.

В результате выполнения работы рассмотрены физические задачи, приводящие к интегральным уравнениям, основные типы интегральных уравнений и методы их решений. Выполнены решения интегральных уравнений с помощью метода последовательных приближений.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции, x и t – действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b) , λ – числовой множитель.

Функция называется *ядром интегрального уравнения* (1); предполагается, что ядро $K(x, t)$ определено в квадрате $\Omega\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в Ω , либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*; если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (2)$$

И называется *однородным*.

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (3)$$

не содержащее искомой функции вне интеграла, называется *интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода*.

Пределы интегрирования a и b в уравнениях (1), (2) и (3) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Решением интегральных уравнений (1), (2) и (3) называется любая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнения последние обращается в тождества относительно $x \in (a, b)$.

2. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Как и в случае уравнений Вольтерра, интегральное уравнение (1) можно решать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \lambda^n, \quad (2)$$

где $\psi_n(x)$ определяются по формулам

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t) dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t) dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt \text{ и т. д.}$$

Здесь

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t) dz, \quad K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t) dz,$$

и вообще

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz, \quad (3)$$

$n = 2, 3, \dots$, причем $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Функции $K_n(x, t)$ определяемые по формулам (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t) ds, \quad (4)$$

где m – любое натуральное число, меньшее n .

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}, \quad (5)$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана ядра*. Он сходится для

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (6)$$

где

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt}.$$

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода (1) выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt. \quad (7)$$

Граница (6) является существенной для сходимости ряда (5). Однако решение уравнения (1) может существовать и для значений $|\lambda| > \frac{1}{B}$.