НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
НАУКА И МИРОВОЗЗРЕНИЕ

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПОЗИЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кыясова Гульджемал Чарымырадовна

Преподаватель, Туркменский государственный университет имени Махтумкули г. Ашхабад Туркменистан

Дурдыев Акмурат Гурбанович

Преподаватель, Пограничный институт Туркменистана г. Ашхабад Туркменистан

Аналитическая геометрия - раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат. Основная задача аналитической геометрии заключается в изучении геометрических фигур с помощью соотношений между координатами точек, из которых эти фигуры образованы.
Начертательная геометрия – раздел геометрии, в котором пространственные фигуры изучаются при помощи построения их изображений на плоскости, в частности построения проекционных изображений, а также методы решения и исследования пространственных задач на плоскости.

Цель начертательной геометрии – развитие пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического мышления, способности к анализу и синтезу пространственных форм и отношений на основе графических моделей пространства, практически реализуемых в виде чертежей конкретных пространственных объектов и зависимостей.

Задача изучения начертательной геометрии сводится к изучению способов получения определенных графических моделей пространства, основанных на ортогональном проецировании и умении решать на этих моделях задачи, связанные пространственными формами и отношениями.

Рассмотрим на примерах метрических задач связь аналитической и начертательной геометрии.

Метрическими называются задачи, решение которых связано с нахождением характеристик геометрических фигур, определяемых (измеряемых) линейными и угловыми величинами.

Все метрические задачи, в итоге, сводятся к решению двух задач, которые называются основными метрическими задачами:

1. Первая основная метрическая задача - построение угла между прямой и плоскостью.

2. Вторая основная метрическая задача – определение расстояния между двумя точками.

В данной статье рассмотрим построение прямого угла с аналитической точки зрения.

1. Перпендикулярность прямых в плоскости.

Две прямые на плоскости перпендикулярны, если при пересечении образуют 4 прямых угла**.**

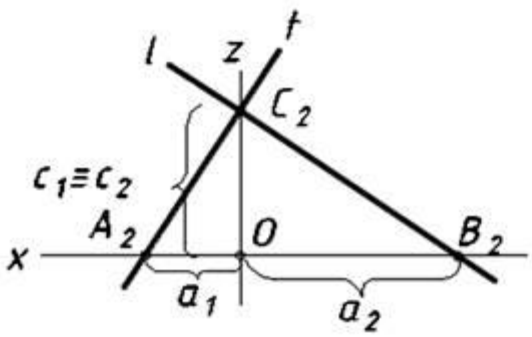

Рисунок 1. Перпендикулярность двух прямых

В плоскости проекций $П_2$ заданы две перпендикулярные прямые ***l*** и ***t*** (рис.1).

Из подобия треугольников C_2OA_2 и B_2OC_2 следует:

$a_1/c_1 = a_2/c_2$ или
$a_1/c_1 - a_2/c_2 = 0$.

Формула (1) является аналитическим выражением перпендикулярности двух прямых в плоскости.

2. Перпендикулярность прямой и плоскости.

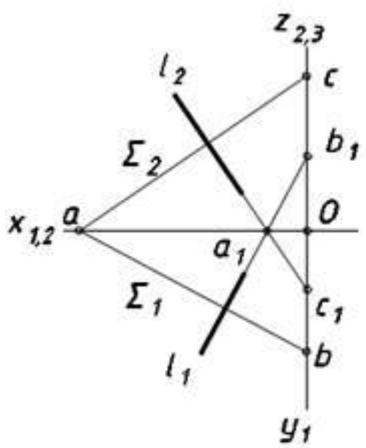

Рисунок 2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Из курса стереометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна хотя бы к двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Дана прямая ***l*** перпендикулярная плоскости S, заданной следами (рис.2).

Плоскость S задана уравнением:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Прямая проходит через две точки с координатами (a_1, 0,0) и (0, - b_1, -c_1). В соответствии с

$$\frac{x-X_A}{X_B-X_A}=\frac{y-Y_A}{Y_B-Y_A}=\frac{z-Z_A}{Z_B-Z_A}$$

получим уравнение прямой *l:*
$x/a_1=(y+b_1)/b_1=(z+c_1)/c_1$

или:

$$\begin{cases} y=\left(\frac{b_1}{a_1}\right)x-b_1; \\ z=\left(\frac{c_1}{a_1}\right)x-c_1. \end{cases}$$

Из подобия треугольников Оас и Оa_1c_1 следует:

$a/c=c_1a_1$ или $aa_1=cc_1$.

Из подобия треугольников Оab и Оa_1b_1 следует:

$a/b=b_1a_1$ или $aa_1=bb_1$.

Окончательно:

$aa_1=bb_1=cc_1$.

Полученное выражение является условием перпендикулярности прямой и плоскости.

3. Перпендикулярность двух прямых в пространстве.

Прямые перпендикулярны, если через одну из прямых можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой.

Допустим: прямая ***l*** проходит через две точки **1**$(X_1;Y_1;Z_1)$ *и* **2**$(X_2;Y_2;Z_2)$;
прямая ***t*** через две точки **3**$(X_3;Y_3;Z_3)$ *и* **4**$(X_4;Y_4;Z_4)$.

Представим прямую l аналитически:

$$\frac{x-X_1}{X_2-X_1}=\frac{y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{z-Z_1}{Z_2-Z_1}.$$

Таким образом, сравнивая

$$\frac{x - X_A}{X_B - X_A} = \frac{y - Y_A}{Y_B - Y_A} = \frac{z - Z_A}{Z_B - Z_A}$$

и $x/ a_1=(y+ b_1)/ b_1=(z+ c_1)/ c_1$ получим для прямой l:

$a=X_2 – X_1;$

$b=Y_2 – Y_1;$

$c=Z_2 – Z_1.$

Заключим прямую ***t*** в плоскость:

$A(X_4-X_3) +B (Y_4-Y_3) +C (Z_4-Z_3) =0.$

Если прямые ***l*** и ***t*** перпендикулярны, то выполняется условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$a_1/A=b_1/B=c_1/C$

или $(X_2-X_1)/A = (Y_2-Y_1)/B = (Z_2-Z_1)/C$

Отсюда $A=B(X_2-X_1)/ (Y_2-Y_1)$, *и* $C= B(Z_2-Z_1)/ (Y_2-Y_1).$

Подставив эти выражения в (7) и умножив каждый член на $(Y_2-Y_1)/B$, получим аналитическое условие перпендикулярности прямых.

$(X_2-X_1) (X_4-X_3)+ (Y_2-Y_1) (Y_4-Y_3) + (Z_2-Z_1) (Z_4-Z_3)=0$

4. Перпендикулярность двух плоскостей.

Плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную другой плоскости.

Заданы две плоскости:

$S: A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1=0;$

$D: A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2=0.$

Допустим, что прямая ***l*** проходит через две точки **1**$(X_1;Y_1;Z_1)$ и **2**$(X_2;Y_2;Z_2)$ плоскости S. Условие принадлежности прямой ***l*** плоскости S:

$A_1(X_2-X_1)+B_1(Y_2-Y_1)+C_1(Z_2-Z_1)=0.$

Отсюда перпендикулярность прямой ***l*** и плоскости D, принимая в расчет (7) выразиться:

$(X_2-X_1)/ A_2+(Y_2-Y_1)/ B_2+(Z_2-Z_1)/ C_2$

или $(X_2-X_1)= A_2(Y_2-Y_1)/ B_2;$

$(Z_2-Z_1)= C_2(Y_2-Y_1)/ B_2.$

Подставляя полученные выражения в () и деля все члены на $(Y_2-Y_1)/ B_2$,

окончательно получим условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1A_2= B_1B_2= C_1C_2=0.$

В отличие от аналитических определения метрических характеристик, геометрические решения довольно-таки приблизительны, хотя с математической точки зрения, являются геометрически точными.