



ПРИЛОЖЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Еджегуль Атаева Сапаргелдиевна

Преподаватель, Туркменский государственный университет имени Махтумкули
г. Ашхабад Туркменистан

Аразгуль Аннаева Шамырадовна

Преподаватель Международного университета нефти и газа имени Ягшыгелди Какаева,
г. Ашхабад Туркменистан

Аннотация: В статье приведены определения несобственных интегралов первого и второго рода. Приведены некоторые приложения несобственных интегралов и известные виды несобственных интегралов.

Ключевые слова: несобственные интегралы, бесконечные пределы интегрирования, точки разрыва функции.

Введение

Изучая математический анализ на первом курсе университета, мы познакомились с определениями и методами вычисления неопределенного и определенного интеграла, рассмотрели различные приложения. Определенный интеграл имеет приложения в разных областях науки. С помощью определенного интеграла можно вычислить площади криволинейных трапеций, объемы тел вращения, длину дуги кривой, статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур, работу, давление и др. В данной статье мы поставили цель изучить несобственные интегралы, а также рассмотреть приложения несобственных интегралов, рассмотреть в каких задачах используются несобственные интегралы.

Материалы и методы

Сначала приведем определения несобственных интегралов. Несобственные интегралы бывают двух видов: несобственный интеграл первого и второго рода.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале $[a, \infty)$.

Предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ называется **несобственным интегралом первого рода** от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$. Можно представить в виде:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если предел **не существует или бесконечен**, то несобственный интеграл **расходится**.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов первого рода

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

аналогичного вида:

(c – произвольное число).

Приведем некоторые примеры вычисления интегралов.

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$$

предел не существует. Несобственный интеграл расходится.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^{-1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 1$$

интеграл сходится.

Если функция $f(x)$ в точке $x = b$ либо неопределена, либо разрывна, тогда вычислить определенный интеграл на отрезке $[a; b]$ можно с помощью предела:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Такой интеграл называют **несобственным интегралом второго рода**.

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

сходится.

Если предел в правой части не существует или бесконечен, то несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

расходится.

Аналогично, если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке c на промежутке $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько. Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Приведем некоторые примеры вычисления несобственных интегралов второго рода.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \operatorname{tg} x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right| + \ln |\cos 0| \right) = \\ &= -\ln |0| + \ln |1| = -\infty + 0 = -\infty. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл расходится.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^3 x^{-3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_{0+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{0+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot (0+\varepsilon)^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{18} + \infty = \infty \end{aligned}$$

Несобственный интеграл расходится.

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{x} \right) \Big|_{0+\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{0+\varepsilon} \right) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$$

Несобственный интеграл сходится.

$$\int_0^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

Вычислим определенный интеграл.

$$\int_{\varepsilon}^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -1 \\ x = \varepsilon \Rightarrow t = \ln \varepsilon \end{array} \right] = \int_{\ln \varepsilon}^{-1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_{\ln \varepsilon}^{-1} = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{\ln \varepsilon} = 1 + \frac{1}{\ln \varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\ln \varepsilon} \right) = 1 + 0 = 1$$

несобственный интеграл сходится.

При вычислении несобственных интегралов возникает две задачи: первая задача – вычисление определенного интеграла, вторая задача – вычисление предела. При вычислении определенного интеграла можно использовать различные методы интегрирования, которые применяются для определенного интеграла: метод интегрирования по частям, метод интегрирования заменой, интегрирование дробей и др. При вычислении предела необходимо так же применить различные методы вычисления пределов функций.

Рассмотрим в каких задачах могут возникнуть несобственные интегралы, изучим приложения несобственных интегралов.

Несобственные интегралы можно применять в различных геометрических приложениях определенных интегралов, когда заданные функции будут иметь точки разрыва в области задания или будут определены на бесконечных промежутках.

При вычислении площади неограниченной криволинейной трапеции. Формула с помощью несобственного интеграла первого рода: пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, \infty)$, тогда площадь фигуры, ограниченной осью Ox и функцией $f(x)$,

$$S = \int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

равна

и существует, если несобственный интеграл сходится. Формула с помощью несобственного интеграла второго рода: пусть функция $f(x)$ не определена в какой-то точке отрезка $[a; b]$, тогда площадь фигуры, ограниченной осью Ox и функцией $f(x)$,

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

равна

и существует, если несобственный интеграл сходится. Приведем примеры.

Пример. Вычислим площадь фигуры, ограниченной осью Ox и функцией

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ при } x \text{ от } 1 \text{ до } \infty. \text{ Построим график функции (рис. 1).}$$

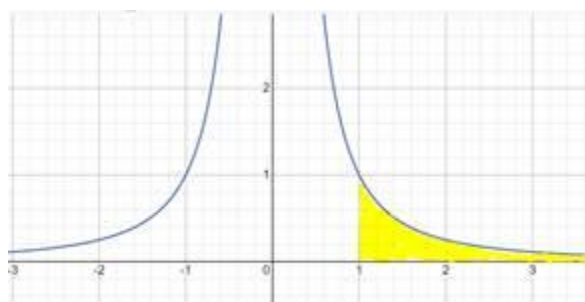


Рисунок 1. График функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Получим, что площадь

$$S = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1$$

(кв. единица). Площадь существует и равна 1 квадратной единице.

Пример. Пример. Вычислим площадь фигуры, ограниченной осью Ох и функцией

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}},$$

при x от 0 до $\pi/2$. Построим график функции (рис. 2).

В точке $\pi/2$ функция

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

имеет разрыв. Вычислим интеграл второго рода.

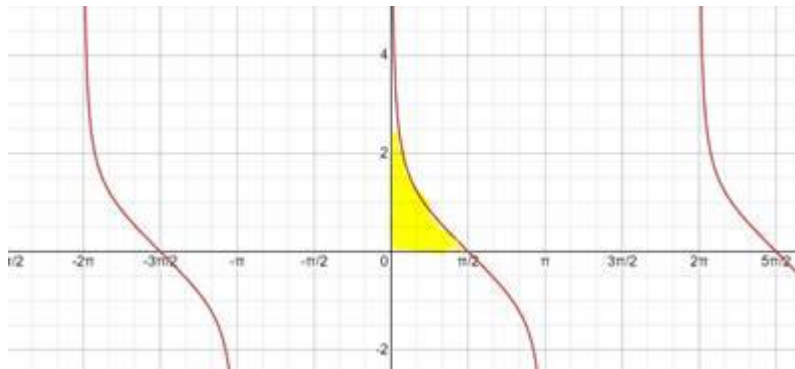


Рисунок 2. График функции $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

Получим, что площадь

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin 0} \right) = 2$$

(кв. единицы). Площадь существует и равна 2 квадратные единицы.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл, который называется интегралом Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Если рассмотреть кривую

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

которая называется кривой Гаусса, то площадь под данной кривой на промежутке от $(-\infty; +\infty)$ получится равной

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

(как сумма вероятностей всех возможных исходов опыта).

Приведем еще примеры известных несобственных интегралов, которые применяются в различных задачах.

Интеграл Эйлера второго рода или Γ (гамма)-функция:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Интеграл Фруллани:

$$J(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0)$$

Интеграл Дирихле:

$$J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$$

Интегралы Френеля:

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

Интегралы Лапласа:

$$J_1(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \quad \text{и} \quad J_2(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx$$

Широко несобственные интегралы применяются в задачах математической физики при применении интегральных преобразований.

Вывод

Таким образом можем заключить, что несобственные интегралы имеют широкие приложения в различных задачах науки и техники. Поэтому необходимо знать их определение и уметь их вычислять.